Die Terme $f(x) = 35x^2 - 31x + 6$ und $g(x) = a(x - b)(x - c)$ sind äquivalent. Bestimme a, b und c.

Weil $f(x)$ und $g(x)$ äquivalent sind, müssen ihre Nullstellenmengen übereinstimmen.

Die Nullstellen von $f(x)$ sind:

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 840}}{70} \\ &= \frac{31 \pm 11}{70} \end{aligned}$$

Also $x_1 = 0{,}6$ und $x_2 = \frac{2}{7}$.

Damit muss auf jeden Fall gelten:

$$g(x) = a\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{2}{7}\right).$$

Ein Vergleich zeigt uns, dass $a = 35$ gelten muss.
Insgesamt erhalten wir also:

$$g(x) = 35\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{2}{7}\right), \quad \text{also} \quad a = 35,\ b = 0{,}6 \text{ und } c = \frac{2}{7}.$$

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_b : x \mapsto x^2 + bx - 1$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und dem Parameter $b \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass jede Funktion f_b dieser Schar genau zwei Nullstellen besitzt.

b) Begründe, dass für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt: Der Graph von f_b ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $2x + b = 0$ und hat die Gerade mit der Gleichung $4y + b^2 + 4 = 0$ als Tangente.

f_b hat genau dann genau zwei Nullstellen, wenn die Gleichung $x^2+bx-1=0$ genau zwei Lösungen hat. Also genau dann, wenn die Diskriminante der Gleichung $x^2+bx-1=0$ positiv ist. Also genau dann, wenn $b^2+4>0$ gilt, also für alle b. Fertig.

- Ich erinnere mich, im Unterricht gelernt zu haben, dass der Graph einer quadratischen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ achsensymmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $x = -\frac{b}{2a}$ ist.

  Wende ich nun mein Wissen auf die Funktion f_b an, so kann ich schließen, dass G_{f_b} achsensymmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $x = -\frac{b}{2}$ ist, also zu der Geraden mit der Gleichung $2x + b = 0$. Fertig.

- Hier denke ich nach. Dann forme ich um.

$$4y + b^2 + 4 = 0$$
$$y = -0{,}25\, b^2 - 1$$

  Jetzt ist es einfach.
  Die Gerade, die ich als Tangente nachweisen soll, ist eine Parallele zur x-Achse.
  Wenn sie Tangente sein soll, dann muss sie durch den Scheitel des Graphen von f_b gehen.
  Der Scheitel hat die x-Koordinate $-0{,}5b$.
  Dann ist seine y-Koordinate

$$f_b(-0{,}5b) = 0{,}25b^2 - 0{,}5b^2 - 1 = -0{,}25b^2 - 1.$$

  Also hat die Parallele zur x-Achse durch den Scheitel die Gleichung

$$y = -0{,}25\, b^2 - 1.$$

  Dies aber ist genau die vorgegebene Geradengleichung. Fertig.

In Einsteins Relativitätstheorie spielt die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ eine wichtige Rolle.

a) Die Definitionsmenge des Terms $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist:

☐ $]-\infty; \infty[$ ☐ $[0; 1]$ ☐ $]-1; 1[$ ☐ $[-1; 1]$

b) Bestätige durch ausführliche Rechnung, dass für $x = 0{,}8$ der Funktionswert $y = 1\frac{2}{3}$ ist.

c) Eine zentrale Aussage von Einsteins Relativitätstheorie lautet: „Die Masse m eines Körpers ist keine Konstante, sondern wächst mit zunehmender Geschwindigkeit v des Körpers.“

Es gilt: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-x^2}}$ mit $x = \dfrac{v}{c}$.

Dabei ist m_0 die Masse des ruhenden Körpers und c die Lichtgeschwindigkeit.
Ergänze folgenden Satz:
„Wenn für einen Körper $x = 0{,}8$ gilt, also seine Geschwindigkeit ...% der Lichtgeschwindigkeit beträgt, dann ist seine Masse das ...fache seiner Masse im ruhenden Zustand.“

Ich kreuze einfach im richtigen Kästchen an.

☐ $]-\infty;\infty[$ ☐ $[0;1]$ ☒ $]-1;1[$ ☐ $[-1;1]$

Langweilig.

$$\frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

„Wenn für einen Körper $x = 0{,}8$ gilt, also seine Geschwindigkeit 80% der Lichtgeschwindigkeit beträgt, dann ist seine Masse das $1\frac{2}{3}$-fache seiner Masse im ruhenden Zustand."

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 4$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Entscheide für jede der folgenden Aussagen über den Graphen von f, ob sie wahr oder falsch ist.

	wahr	falsch
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	☐	☐
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0\,|\,4)$.	☐	☐
Der Punkt $(4\,|\,11)$ liegt auf dem Graphen.	☐	☐
Für $x \in\,]-2; 2[$ verläuft der Graph oberhalb der x-Achse.	☐	☐
Die Gerade mit der Gleichung $y = -4$ ist Tangente an den Graphen.	☐	☐
Der Graph ist kongruent zum Graphen der Funktion $g : x \mapsto (3 - x)^2 + 1$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.	☐	☐
Es gibt zwei Tangenten an den Graphen, die aufeinander senkrecht stehen.	☐	☐

Ich kreuze einfach die richtigen Kästchen an.

	wahr	falsch
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	☒	☐
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0 \mid 4)$.	☐	☒
Der Punkt $(4 \mid 11)$ liegt auf dem Graphen.	☐	☒
Für $x \in]-2; 2[$ verläuft der Graph oberhalb der x-Achse.	☐	☒
Die Gerade mit der Gleichung $y = -4$ ist Tangente an den Graphen.	☒	☐
Der Graph ist kongruent zum Graphen der Funktion $g : x \mapsto (3 - x)^2 + 1$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.	☒	☐
Es gibt zwei Tangenten an den Graphen, die aufeinander senkrecht stehen.	☒	☐

a) Auf die Frage, „Wie addiert man zwei negative Zahlen?“ antwortet Oberto „minus plus minus ist minus“. „Naja, das ist so eine Kurzform,“ sagt die Lehrerin, „aber was bedeutet das denn eigentlich?“
Formuliere eine Erklärung, die Obertos Lehrerin zufrieden stellen würde.

b) Auf die Frage, „Was besagt der Satz des Thales?“ antwortet Odo „Der Winkel bei C ist 90 Grad“. „Naja, das ist so eine Kurzform,“ sagt die Lehrerin, „aber was bedeutet das denn eigentlich?“
Formuliere eine Erklärung, die Odos Lehrerin zufrieden stellen würde.

c) Auf die Frage, „Was besagt der Satz des Pythagoras?“ antwortet Ogün „$a^2 + b^2 = c^2$“. „Naja, das ist so eine Kurzform,“ sagt die Lehrerin, „aber was bedeutet das denn eigentlich?“
Formuliere eine Erklärung, die Ogüns Lehrerin zufrieden stellen würde.

Ich addiere die Beträge der beiden Zahlen. Vor das Ergebnis setze ich ein Minuszeichen.

Wenn ich ein Dreieck ABC habe, bei dem C auf dem (Halb-)Kreis mit der Strecke [AB] als Durchmesser liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

Wenn ich ein rechtwinkliges Dreieck habe, dann kann ich immer die folgenden zwei Rechnungen durchführen.

(i) Ich kann die Länge der einen Kathete quadrieren, die Länge der anderen Kathete quadrieren und beide (Zwischen-)Ergebnisse addieren. Ich erhalte das Ergebnis meiner ersten Rechnung.

(ii) Ich kann die Länge der Hypotenuse quadrieren. Ich erhalte das Ergebnis meiner zweiten Rechnung.

Vergleiche ich nun meine zwei Ergebnisse, so stelle ich fest, dass sie übereinstimmen.

Vereinfache folgende Terme möglichst weit.

a) $\sqrt{5^2 - 4^2}$

b) $\frac{10+\sqrt{8}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{c+1}}$ für $c > 1$

d) $\sqrt{(d+1)d - d}$ für $d < 0$

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\frac{10+\sqrt{8}}{2} = \frac{10+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(5+\sqrt{2})}{2} = 5+\sqrt{2}.$$

$$\frac{\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{c+1}} = \frac{\sqrt{(c+1)(c-1)}}{\sqrt{c+1}} = \frac{\sqrt{c+1}\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}} = \sqrt{c-1}.$$

$$\sqrt{(d+1)d-d} = \sqrt{d^2+d-d} = \sqrt{d^2} = -d.$$

Ein „Rechentrick“ zum Quadrieren einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer 5 lautet so:

Nimm die Zehnerziffer der Zahl und vergrößere sie um 1, multipliziere das Ergebnis mit der Zehnerziffer selbst. Hängt man an die Zahl, die sich dabei ergibt, die Ziffernfolge 25 an, hat man schon die gesuchte Quadratzahl.

a) Berechne nachvollziehbar mit dieser Methode das Quadrat der Zahl 45.

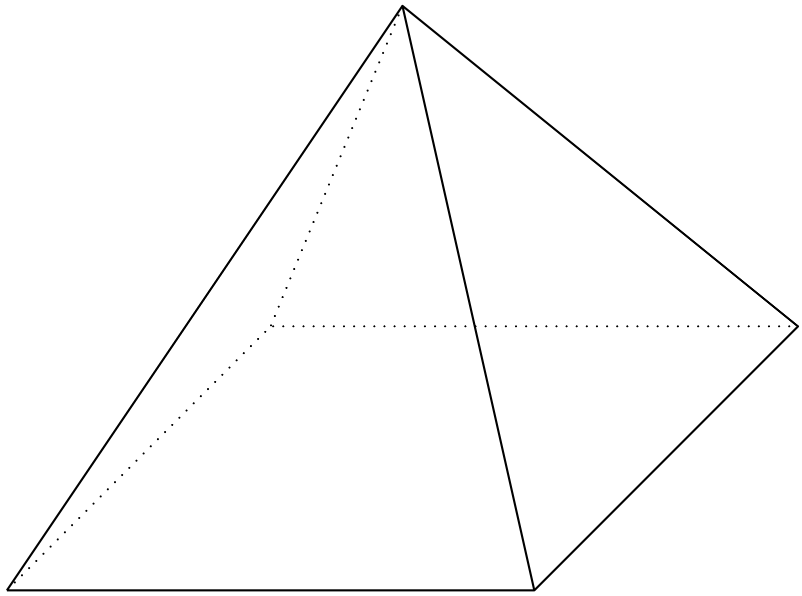
b) Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer x und der Einerziffer 5 lässt sich schreiben als $10x + 5$. Berechne $(10x + 5)^2$, forme das Ergebnis geeignet um und begründe dadurch den obigen „Rechentrick“.

4
$4 + 1 = 5$
$5 \cdot 4 = 20$
2025
Also $45^2 = 2025$. Fertig.

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25$$

x heißt Zehnerziffer nehmen.
$x + 1$ heißt Zehnerziffer um 1 erhöhen.
$x(x + 1)$ heißt Zehnerziffer mit der um Eins erhöhten Zehnerziffer multiplizieren.
$100x(x+1)$ heißt an das Ergebnis der vorigen Rechnung zwei Nullen anhängen.
$100x(x + 1) + 25$ heißt statt der zwei Nullen die Ziffernfolge 25 anhängen.
Fertig.

Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge g hat die Höhe h.



a) Löse die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot g^2 \cdot h$ für das Volumen der Pyramide nach der Seitenlänge g auf.

b) Wie groß ist der Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, wenn die Höhe halb so lang wie die Diagonale des Grundflächenquadrats ist?

Die Pyramide wird nun von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand $\frac{h}{2}$ hat.

c) Zeichne die entstehende Schnittfläche in das obige Schrägbild ein.

d) Welcher Bruchteil des Inhalts der Grundfläche ist der Inhalt der Schnittfläche?

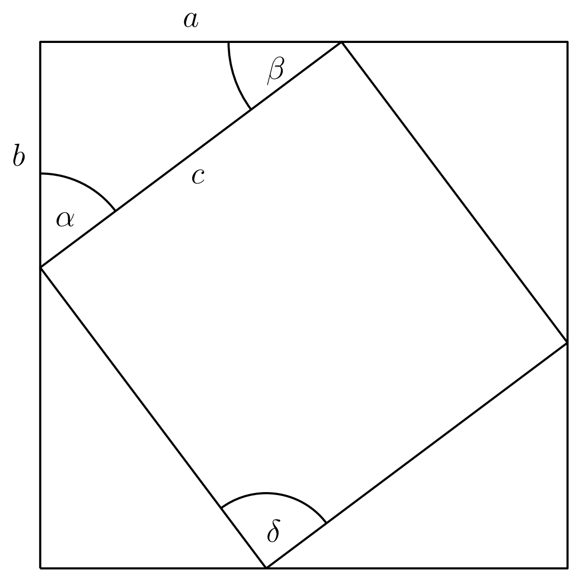
☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{8}$

e) Welcher Bruchteil des Pyramidenvolumens ist das Volumen der abgeschnittenen kleinen Pyramide?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{8}$

Die gerade Pyramide ABCDS hat das Rechteck ABCD mit $\overline{\mathrm{AB}} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{AD}} = 6\,\mathrm{cm}$ als Grundfläche. Die Kante [AS] ist 13 cm lang. Bestimme das Volumen der Pyramide.

Gegeben sind vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c. Damit wird eine Figur so gezeichnet, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ entsteht, vergleiche Abbildung.



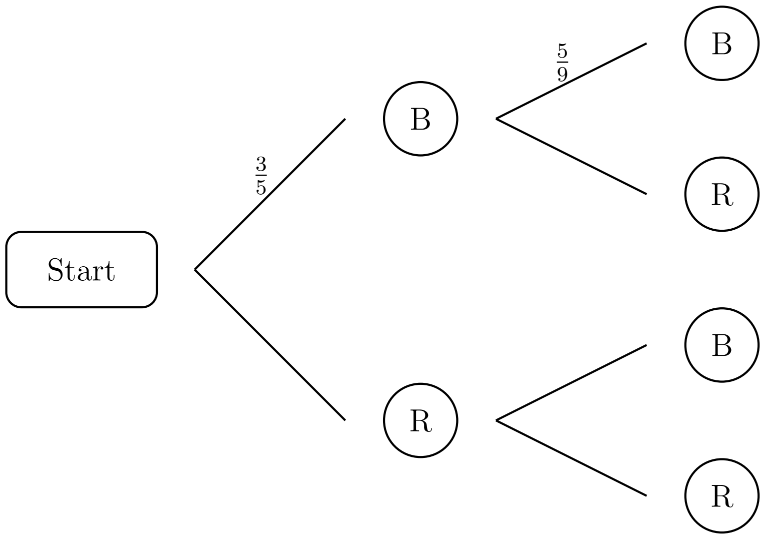
a) Warum ergeben die den Katheten gegenüberliegenden Winkel α und β zusammen $90°$?

b) Das innere Viereck hat vier gleich lange Seiten. Begründe, dass es ein Quadrat ist, indem du durch eine Winkelbetrachtung nachweist: $\delta = 90°$.

c) Berechne den Flächeninhalt des äußeren Quadrats auf zwei verschiedene Arten und folgere daraus den Satz des Pythagoras.

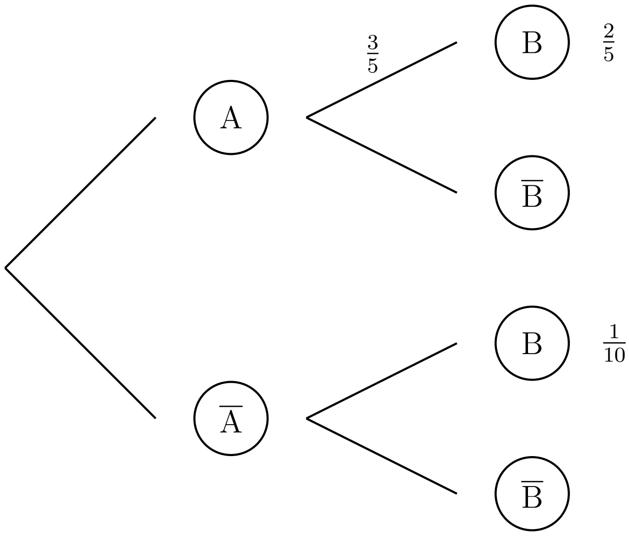
Weise nach, dass das Viereck ABCD mit $A(0\,|\,0)$, $B(1\,|\,3)$, $C(-3{,}5\,|\,4{,}5)$ und $D(-4{,}5\,|\,1{,}5)$ ein Rechteck ist und berechne seinen Flächeninhalt.

Aus einer Urne mit 4 roten und 6 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen. Zu diesem Zufallsexperiment gehört das nachstehende (nicht vollständig ausgefüllte) Baumdiagramm.



Begründe anhand des Baumdiagramms, warum bei diesem Zufallsexperiment ohne Zurücklegen gezogen wird, vervollständige das Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

Das Baumdiagramm gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B.



a) Berechne $P(\overline{\mathrm{B}})$.

b) Weise nach, dass $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$ gilt.

c) Von den im Baumdiagramm angegebenen Zahlenwerten soll nur der Wert $\frac{1}{10}$ so geändert werden, dass $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$ gilt. Bestimme den geänderten Wert.

Gib jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

a) Die Funktion a hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und den Wertebereich $[-5; \infty[$.

b) Der Definitionsbereich der Funktion b ist $\mathbb{R}$, ihr Graph ist streng monoton steigend und enthält den Punkt $(3 \,|\, -2)$.

c) Der Graph der Funktion c enthält den Punkt $(0 \,|\, -4)$ und hat (genau) die zwei Asymptoten $x = 3$ und $y = -2$.

d) Der Definitionsbereich der Funktion d ist $\mathbb{R}$, ihr Graph enthält die Punkte $(-2 \,|\, 0)$, $(3 \,|\, 0)$ und $(0 \,|\, 5)$.

e) Die Funktion e hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$, ihr Graph ist symmetrisch zu $x = 5$ und hat die Gerade $y = 3$ als Tangente.

f) Die Funktion f hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$, ihr Graph ist punktsymmetrisch zu $(1 \,|\, 1)$ und enthält den Punkt $(3 \,|\, 5)$.

g) Die Funktion g hat den maximalen Definitionsbereich $]-\infty; 5]$.

a) Löse: $6x^2 + 7x - 5 = 0$.

b) Löse, ohne die Lösungsformel für quadratische Gleichungen zu verwenden: $(2x - 3)^2 = 6$

Der Graph einer quadratischen Funktion f hat den Scheitel S$(-1|\,2)$ und geht durch den Punkt P$(2\,|\,5)$. Bestimme eine Gleichung des Funktionsterms $f(x)$. Erläutere deine Vorgehensweise.

Pascal und Pinkus spielen. Ihr Spiel besteht darin, aus einer Urne, in der genau drei blaue und genau eine rote Kugel liegen, abwechselnd je eine Kugel (ohne sie zurückzulegen) zu ziehen. Sieger ist, wer unter seinen zwei gezogenen Kugeln die rote Kugel hat. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit Pascal, der als Erster eine Kugel zieht, bei diesem Spiel gewinnt.

Vereinfache (möglichst weit):

$$\frac{12a + 12 + 3a^2}{21a + 42} + \frac{36a^2 - 25}{42a - 35}$$

Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat das Volumen 288. Die Höhe der Pyramide ist genau so lang wie die Diagonale der Grundfläche. Bestimme, wie lang eine Seite der Grundfläche ist.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Seite $3\,\mathrm{cm}$, eine andere Seite $\sqrt{13}\,\mathrm{cm}$ lang. Erläutere, warum damit das Dreieck noch nicht eindeutig festgelegt ist. Bestimme alle möglichen Längen für die dritte Seite.

Zeige, dass die Terme

$$a(x) = \frac{20x}{x^2 - 25} \qquad \text{und} \qquad b(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$$

äquivalent sind (über $\mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$).

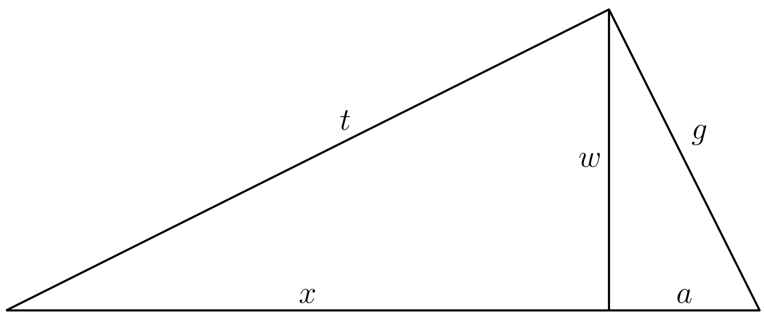
Die Gerade $g: y = 2x + 3$ und die Parabel $p: y = x^2 + x + 1$ schneiden sich in den Punkten A und B. Bestimme (rechnerisch, exakt) den Abstand von A und B. Überprüfe deine Rechnung durch eine (maßstabsgetreue) Zeichnung.

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment: Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

a) Gib alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

b) Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuche, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

Die Abbildung zeigt ein großes rechtwinkliges Dreieck, das durch die Höhe in zwei (kleinere) rechtwinklige Teildreiecke zerlegt wird. Die rechten Winkel sind nicht eingezeichnet. Fünf Strecken(-längen) sind benannt.



Zwischen diesen benannten Streckenlängen gibt es Beziehungen, die sich in Form von (insgesamt) sieben Gleichungen anschreiben lassen.

Eine Gleichung ist zum Beispiel: $(x+a)^2 = g^2 + t^2$.

Gib die übrigen sechs Gleichungen an.

Hinweis: Jede dieser sieben Gleichungen lässt sich als Aussage über Flächeninhalte deuten.

Der Einfachheit halber gebe ich alle sieben Gleichungen an.

$$(x+a)^2 = g^2 + t^2 \tag{1}$$
$$t^2 = x^2 + w^2 \tag{2}$$
$$g^2 = a^2 + w^2 \tag{3}$$
$$w^2 = xa \tag{4}$$
$$g^2 = (x+a)a \tag{5}$$
$$t^2 = (x+a)x \tag{6}$$
$$(x+a)w = tg \tag{7}$$

Erläutere (anhand einer aussagekräftigen Skizze), was die Gleichung

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

in einem gleichseitigen Dreieck aussagt. Berechne dann (in Teilschritten) den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe 18.

Wir denken an die Grundformel

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$$

und erhalten:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \Longleftrightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot h^2$$

Mit $h = 18$ ergibt sich:

$$A = \sqrt{3} \cdot 108$$

Als (nicht gefragten) Näherungswert für den Flächeninhalt ergibt sich 187.

In einem gleichseitigen Dreieck beträgt die Differenz zwischen der Länge einer Seite und der Länge einer Höhe genau 1. Bestimme (exakt) den Umfang des Dreiecks.

Mit der Grundformel

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

und der Vorgabe

$$a - h = 1$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a - \frac{a}{2}\sqrt{3} &= 1 \\
a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 1 \\
a &= \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{2}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\
&= 4 + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Länge des Umfangs:

$$12 + 6\sqrt{3}.$$

Ein (nicht gefragter) Näherungswert: 22,4.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Hypotenusenabschnitt 4-mal so lang wie der andere. Die Höhe (auf die Hypotenuse) hat die Länge 1,5. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.

Mit der Grundformel

$$h^2 = pq$$

und den Vorgaben

$$q = 4p \quad \text{und} \quad h = 1{,}5$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1{,}5^2 &= 4p^2 \\ p^2 &= \frac{9}{16} \\ p &= \frac{3}{4} = 0{,}75 \end{aligned}$$

Der längere Hypotenusenabschnitt ist dann

$$q = 3.$$

Die Hypotenuse hat also die Länge 3,75.
Damit ergibt sich als Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}75 = 2{,}8125.$$

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die längere Kathete um 49 cm kürzer als die Hypotenuse, aber um 151 cm länger als die kürzere Kathete. Zeige, dass diese Angaben das Dreieck eindeutig festlegen und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Die Punkte $A(700\,|\,502)$ und $B(-14\,|\,-8)$ liegen auf der Geraden g.

a) Bestimme eine Gleichung für g.

b) Berechne, welchen Abstand A von B hat.

c) Untersuche, ob der Punkt $C(342\,|\,247)$ auf oder oberhalb oder unterhalb von g liegt.

Der allgemeine Ansatz lautet: $g : y = mx + t$.

Die Steigung m von g lässt sich ganz einfach mit einem (gedachten) Steigungsdreieck berechnen.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{502 - (-8)}{700 - (-14)} \\ &= \frac{510}{714} \\ &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Den y-Achsenabschnitt erhalten wir, wenn wir die Koordinaten von A in den Ansatz $y = \frac{5}{7}x + t$ einsetzen.

$$\begin{aligned} 502 &= \frac{5}{7} \cdot 700 + t \\ 502 &= 500 + t \\ 2 &= t \end{aligned}$$

Insgesamt also: $g : y = \frac{5}{7}x + 2$.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(700-(-14))^2+(502-(-8))^2}\\ &= \sqrt{714^2+510^2}\\ &= \sqrt{769896}\\ &= 102\sqrt{74}\end{aligned}$$

Ein (nicht verlangter) Näherungswert ist 877,44.

Wenn wir $x = 342$ in die Gleichung von g einsetzen, so erhalten wir:

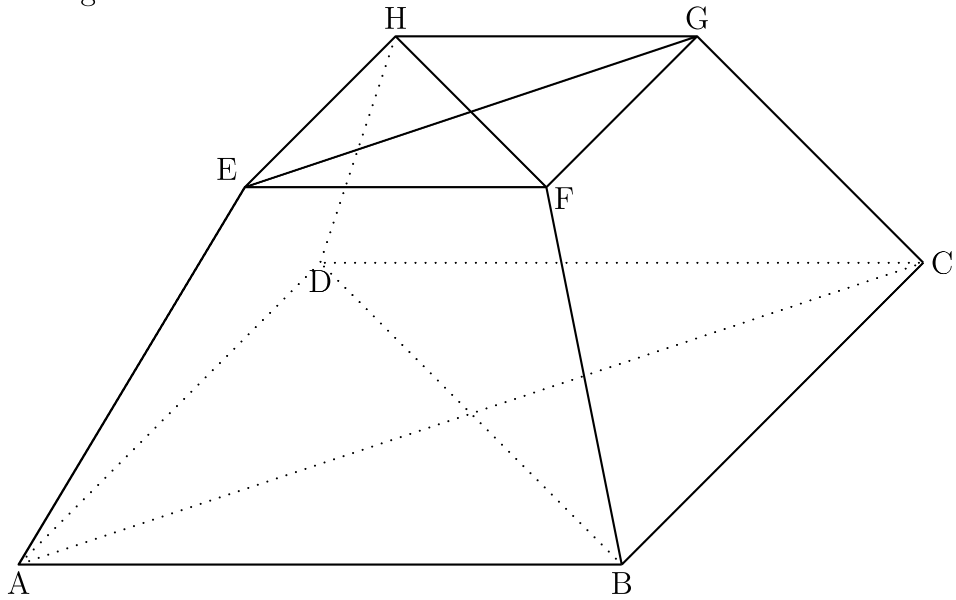
$$y = \frac{5}{7} \cdot 342 + 2 = \frac{1724}{7} = 246\frac{2}{7} \neq 247.$$

Also liegt C nicht auf g.
Weil $247 > 246\frac{2}{7}$, liegt C oberhalb von g.

a) Erläutere anhand einer aussagekräftigen Skizze, was man unter einem Trapez, insbesondere unter einem achsensymmetrischen Trapez versteht.

b) In einem achsensymmetrischen Trapez mit dem Flächeninhalt $27\,\text{cm}^2$ ist die Höhe doppelt so lang wie die kürzere der beiden Grundseiten und die längere der beiden Grundseiten ist genau so lang wie die Höhe. Berechne die Länge der Diagonalen, also den Abstand zweier gegenüberliegender Eckpunkte.

Eine regelmäßige Pyramide ABCDS wird parallel zur quadratischen Grundfläche ABCD in zwei Teilkörper geschnitten. Einer dieser beiden Teilkörper ist der Pyramidenstumpf ABCDEFGH mit quadratischer Deckfläche EFGH und $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 5\,\text{cm}$, vgl. (nicht maßstabsgetreue) Abbildung.



a) Berechne (auf 0,01° genau) den Winkel α, den die Diagonale [AC] und die Kante [AE] einschließen.

b) Gib an, was sich aus der Angabe „regelmäßig“ über die Lage von S bezüglich der Grundfläche ABCD aussagen lässt und bestimme (exakt) den Abstand von S zur Grundfläche ABCD.

c) Bestimme (exakt) das Volumen des Pyramidenstumpfs ABCDEFGH.

Gib den Wert für $\cos 30^\circ$ an und verwende die für alle Winkel $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ gültige Beziehung $2 \cdot (\cos\alpha)^2 = 1 - \cos(2\alpha)$, um einen exakten Wert für $\cos 15^\circ$ anzugeben. Dein Wert muss nicht vereinfacht sein.

In einer Urne liegen 4 blaue und 6 rote Kugeln. Victor zieht nacheinander, ohne Zurücklegen 5 Kugeln. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit nicht alle dieser 5 gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. Exaktes Ergebnis.

Wera und Walburga haben je drei Steine. Sie werfen abwechselnd auf eine Blechdose. Ihre Treffsicherheiten betragen 0,2 bzw. 0,25. Wera beginnt. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass (i) Wera und (ii) Walburga als erste trifft.

Gib jeweils den Term an und berechne seinen Wert.

a) Der Term ist eine Quadratwurzel, dessen Radikand die Differenz des Quotienten der Zahlen 1017 und 3 und der Summe der Zahlen -4 und 12 ist.

b) Der Term ist ein Quotient, dessen Dividend die Quadratwurzel von der Summe der Zahlen 5 und 11 und dessen Divisor die Summe der Quadratwurzel von 144 und der Differenz aus 25 und 9 ist.

a) Untersuche, ob es eine positive reelle Zahl gibt, die um 1 größer als ihr Quadrat ist.

b) Bestimme eine positive reelle Zahl, die um 1 kleiner als ihr Quadrat ist.

c) Wie viele reelle Zahlen gibt es, die um 1 größer als ihr Kehrwert sind? Begründe deine Antwort.

d) Untersuche, ob sich die Zahl $4\frac{1}{60}$ so in zwei Summanden zerlegen lässt, dass der eine Summand gleich dem Kehrwert des anderen ist. Bestimme gegebenenfalls zwei derartige Summanden und ihren Produktwert.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die längere Kathete um 1 cm kürzer als die Hypotenuse, aber um 7 cm länger als die kürzere Kathete. Bestimme alle Seitenlängen.

Bestimme jeweils die Lösungsmenge (über der jeweils maximalen Grundmenge).

a) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = 2$

b) $\frac{x}{1+x} = \frac{4-x}{1-x^2}$

c) $\frac{6}{3x-1} = 1 + \frac{8}{3+x}$

Bestimme (exakt) die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g. Überprüfe deine Rechnung durch eine Zeichnung.

a) $f : x \mapsto 2x - 6$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{4}{x+3} - 5$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $f : x \mapsto 2x + 1$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{20}{x} - 5$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $f : x \mapsto 4x - 3$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{8}{x-7} - 6$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

d) $f : x \mapsto 4x + 1$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto \frac{6}{x-1} + 10$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

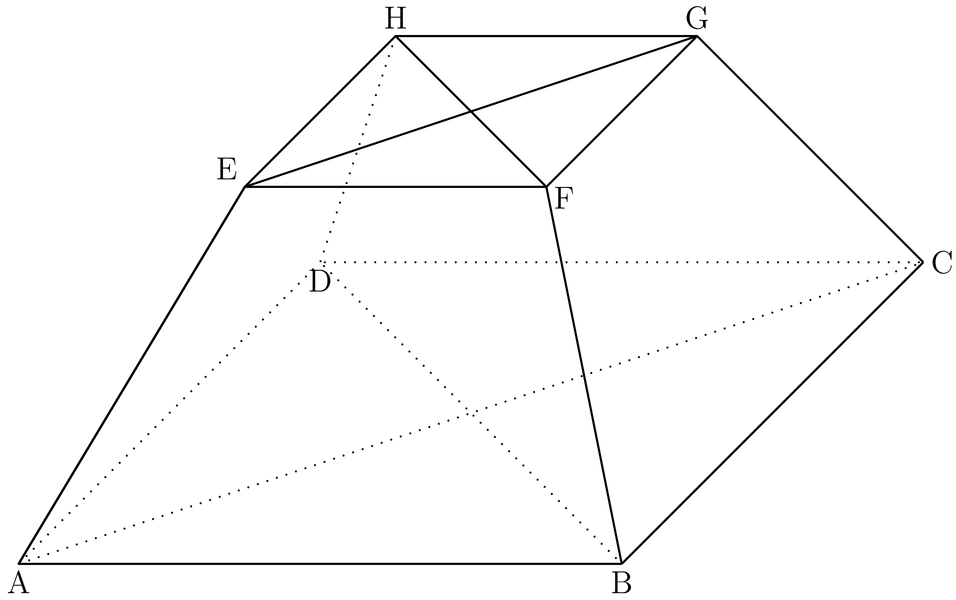
e) $f : x \mapsto 3x^2 + 8x - 2$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \mapsto x^2 + x + 2$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

f) $f : x \mapsto 30x^2 + 14x - 4$ und $g : x \mapsto -5x^2 + 5x - 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

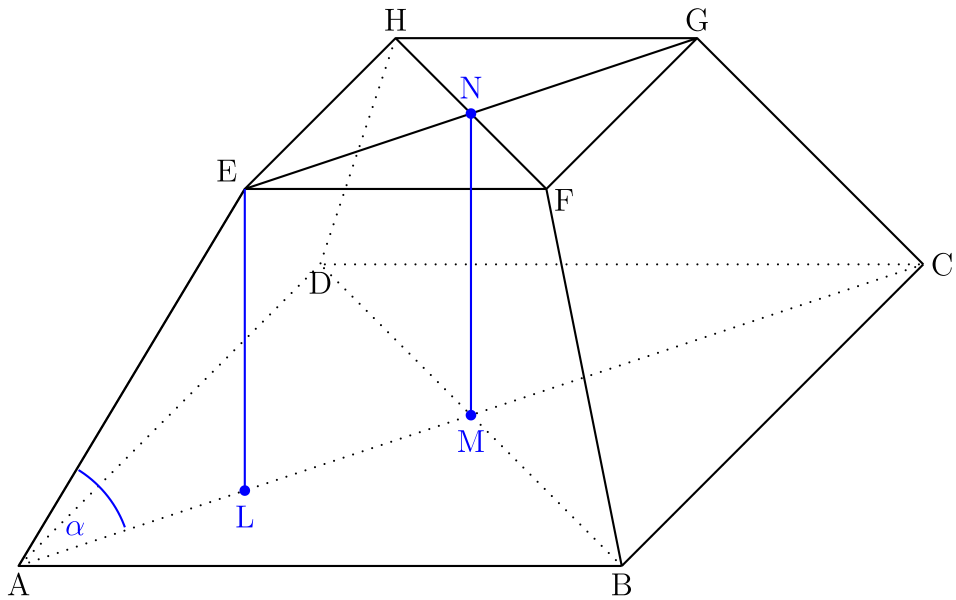
g) $f : x \mapsto 6x^2 - 7x + 3$ und $g : x \mapsto -2x + 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Flächeninhalt 43 ist eine Kathete 8-mal so lang wie die andere. Bestimme die Länge der Hypotenuse.

Gegeben ist der regelmäßige Pyramidenstumpf ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche ABCD und quadratischer Deckfläche EFGH und $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 2{,}5\,\text{cm}$, vgl. die nicht maßstabsgetreue Abbildung.



Bestimme (auf 0,01° genau) die Größe des Winkels, den die Diagonale [AC] und die Kante [AE] einschließen. Erläutere deine Überlegungen.



Den Mittelpunkt der Diagonale [AC] nennen wir M,
den Mittelpunkt der Diagonale [EG] nennen wir N,
den Fußpunkt des Lots von E auf [AC] nennen wir L, vgl. Skizze.
Das Dreieck ALE ist rechtwinklig (bei L).
Der Winkel bei A (nennen wir ihn α) in diesem Dreieck ist der Winkel zwischen [AC] und [AE].
Das Viereck LMNE ist ein Rechteck.

$$\overline{\mathrm{LM}} = \overline{\mathrm{EN}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 1{,}5\sqrt{2}.$$

Die ganze Diagonale [EG] des Quadrats EFGH wäre $3\sqrt{2}$ lang.

$$\overline{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Die ganze Diagonale [AC] des Quadrats ABCD wäre $4\sqrt{2}$ lang.
Also gilt:

$$\overline{\mathrm{AL}} = 0{,}5\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \overline{\mathrm{AE}} = 2{,}5 \quad \text{(nach Voraussetzung).}$$

Mit

$$\cos\alpha = \frac{0{,}5\sqrt{2}}{2{,}5}$$

folgt

$$\alpha \approx 73{,}57°.$$

Die gesuchte Winkelgröße ist also etwa 73,57°.