1. Ergänze jede der folgenden Aussagen zum Rechnen mit Potenzen mathematisch sinnvoll und grammatikalisch korrekt.

   a) Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die ... beibehält und die Exponenten ....

   b) Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis ... und die Exponenten ....

   c) Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die ... dividiert und den ... beibehält.

2. Vereinfache jeden der folgenden Terme möglichst weit. Schreibe den vereinfachten Term jeweils ohne Verwendung eines Bruchstrichs an.

   a) $8^{4r+1} - 6 \cdot 4096^r \quad$ mit $r \in \mathbb{Z}$.

   b) $\dfrac{a^4 : \left(a^{-5}\right)^3}{\left(a^{-6}\right)^{-7} \cdot a^{-2}} \quad$ mit $a > 0$.

   c) $\dfrac{a^{31} : b^{-12}}{b^5 \cdot a^{-4}} : \dfrac{b^{-11}}{a^{15}} \quad$ mit $a > 0$ und $b > 0$.

3. Die Punkte $\mathrm{A}(4\,|\,-1)$ und $\mathrm{B}(-2\,|\,-5)$ liegen auf der Geraden g. Bestimme eine Gleichung für g.

4. Zeichne den Graphen der Funktion $f : x \mapsto 2x - 3$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}$. Ergänze folgende Beschreibung des Graphen: „Der Graph ist eine ... mit der ... und dem ....

5. Bestimme (exakt) die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden $g: y = 2x - 1$ und $h: y = 0{,}5x - 4$.

6. p ist die Parallele zu $g : y = 3x - 4$ durch A$(2 \,|\, 3)$. Beschreibe, wie du vorgehst, um eine Gleichung für p zu bestimmen. Gib eine Gleichung für p an.

7. Vom Punkt B(2 | 5) aus wird das Lot ℓ auf die Gerade $g : y = -2x - 3$ gefällt. Zeichne g und ℓ in ein Koordinatensystem ein. Das Produkt der Steigungen von g und ℓ hat einen (einfachen) Wert. Gib diesen Wert an und bestimme dann eine Gleichung für ℓ.

8. Bestimme eine Gleichung der Geraden durch die Punkte $(2\,|\,7)$ und $(-6\,|\,9)$. Untersuche dann (rechnerisch), ob der Punkt $(794\,|\,-190)$ auf, oberhalb oder unterhalb der Geraden liegt.

9. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2x+3} + 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{-1{,}5\}$.

   a) Bestimme (rechnerisch) die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

   b) Trage den Graphen von f in ein Koordinatensystem ein.

   c) Ergänze folgende Beschreibung des Graphen von f grammatikalisch richtig und mathematisch sinnvoll.
   „Der Graph ist eine …, bestehend aus zwei so genannten …. Der Graph hat die senkrechte Asymptote … und die … Asymptote …. Im Bereich … verläuft der Graph oberhalb der …, im Bereich $x < -1{,}5$ verläuft der Graph …. Der Graph ist … zu $(-1{,}5\,|\,2)$."

10. f ist eine gebrochen-rationale Funktion, deren Graph genau zwei Asymptoten, nämlich die Geraden $x = -4$ und $y = 1$ besitzt. Gib eine (mögliche) Gleichung des Funktionsterms $f(x)$ und den Definitionsbereich von f an. Erläutere, warum es viele mögliche Funktionsterme gibt.

11. Der Graph der Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x-2} + 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ wird um 2 längs der x-Achse und um -4 längs der y-Achse verschoben. Es entsteht der Graph der Funktion g. Gib $g(x)$ an. Erläutere deinen Gedankengang.

12. Magnus kauft 3 Tomaten und 4 Bananen. Er zahlt 1,00 €. Peter kauft (im gleichen Geschäft) 5 Tomaten und 2 Bananen. Er zahlt 0,92 €. Bestimme, wie viel eine Tomate, wie viel eine Banane kostet.

13. Ein Laplace-Würfel, der mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet ist, wird zweimal nacheinander geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Augensumme 10 erhält.

14. Auf einem Spielfeld, das 100 m lang und 75 m breit ist, findet ein Fußballspiel statt. Ein Spieler passt den Ball zu einem Mitspieler; dabei ist der Ball zwei Sekunden unterwegs. Schätze den Anteil der Spielfeldfläche ab, den die zehn Feldspieler der gegnerischen Mannschaft in dieser Zeit höchstens abdecken können. Gehe dazu davon aus, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit der Spieler, während der Ball unterwegs ist, 5 m/s beträgt. Erläutere dein Vorgehen.

15. Bestimme die Lösung der Gleichung $\frac{1}{4x-5} - \frac{1}{6x} = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{Q} \setminus \{0; 1{,}25\}$.

16. Bestimme die Lösungen der Gleichung $x - 3 = \frac{4-3x}{x}$ über der Grundmenge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

17. Gegeben ist der Term $T(a;b) = \frac{a+b}{a-b}$.

    a) Berechne den Wert des Terms für $(a;b) = (-2;3)$.

    b) Gib ein Zahlenpaar $(a;b)$ an, das nicht in den Term eingesetzt werden darf.

    c) Gib ein Zahlenpaar $(a;b)$ an, für das der Term den Wert 0 ergibt.

    d) Es gibt unendlich viele Zahlenpaare $(a;b)$, für die der Wert des Terms 2 ist. Zeige, dass für diese Zahlenpaare $a = 3b$ gilt.

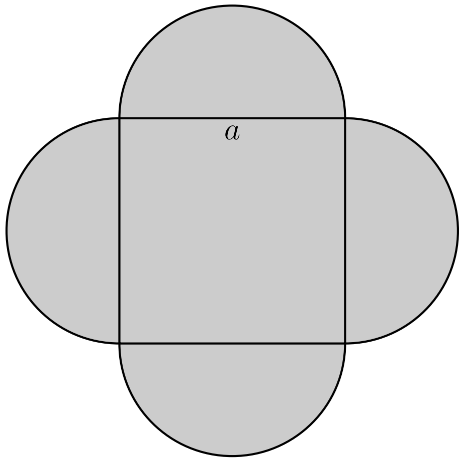
18. a) Nathan betrachtet den Vollmond. Mit einer kleinen Kunststoffperle, die er 70 cm vor sein Auge hält, kann er den Mond genau abdecken. Nathan weiß, dass die Perle einen Durchmesser von 7 mm hat und dass der Monddurchmesser 3500 km beträgt. Berechne aus diesen Angaben, wie weit der Mond etwa von der Erdoberfläche entfernt ist. Erläutere deinen Gedankengang.

b) In einem einfachen Modell bewegt sich der Mond mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit dem Radius 384000 km um die Erde. Für einen Umlauf um die Erde benötigt der Mond 27 Tage. Kreuze den Zahlenterm an, mit dem sich die Bahngeschwindigkeit des Mondes in km/h berechnen lässt.

☐ $\frac{2\pi \cdot 384000}{27 \cdot 24 \cdot 3600}$ ☐ $\frac{2\pi \cdot 384000}{27 \cdot 24}$ ☐ $\frac{27 \cdot 24}{2\pi \cdot 192000^2}$

☐ $\frac{27 \cdot 24}{\pi \cdot 384000}$ ☐ $\frac{\pi \cdot 384000^2 \cdot 24}{27}$ ☐ $\frac{2\pi \cdot 192000}{27 \cdot 24}$

19. Einem Quadrat der Kantenlänge a sind vier Halbkreise aufgesetzt, vergleiche Abbildung.

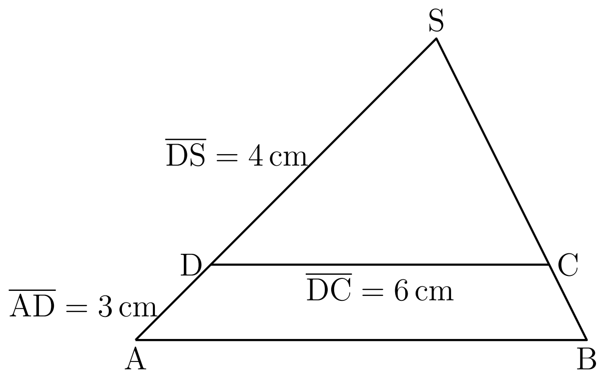


a) Zeige, dass für den Inhalt A der grau getönten Fläche (in Abhängigkeit von der Kantenlänge a) gilt: $A = a^2(1 + 0{,}5\pi)$.

b) Bestimme, um wie viel Prozent dieser Inhalt A größer als der des Quadrats (mit der Kantenlänge a) ist. Runde auf 2 Dezimalen.

c) Wie groß ist der Inhalt A, wenn $a = 70\,\text{cm}$ ist? Gib diesen Inhalt sowohl in cm^2 als auch in m^2 an, runde dabei jeweils auf 2 Dezimalen.

20. Gegeben ist ein Trapez ABCD, dessen Schenkel sich im Punkt S schneiden. In der nicht maßstabsgetreuen Skizze sind die gegebenen Streckenlängen eingetragen.



a) Wie groß ist das Verhältnis $\overline{SC} : \overline{CB}$?

☐ $4:7$ ☐ $7:4$ ☐ $3:4$ ☐ $4:3$ ☐ $4:6$

b) Berechne die Streckenlänge $\overline{AB}$.

21. Zeichne die Geraden $g : y = 2x - 0{,}5$ und $h : y = -0{,}25x + 3{,}5$ in ein Koordinatensystem ein und bestimme (exakt) die Koordinaten ihres Schnittpunkts S. Den Schnittpunkt von g mit der y-Achse nennen wir A, den Schnittpunkt von h mit der y-Achse nennen wir B. Die drei Punkte A, S und B bilden ein Dreieck. Ergänze deine Zeichnung dementsprechend und bestimme (exakt) den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

22. In einer Kiste liegen Bälle. Jeder Ball ist entweder rot oder blau. Die Anzahl der roten Bälle bezeichnen wir mit r, die Anzahl der blauen mit b. Schreibe (mit Hilfe der Symbole r und b) zu jeder Aussage eine zugehörige Ungleichung auf.

    a) In der Kiste liegen höchstens 28 Bälle.

    b) Selbst wenn man noch vier rote Bälle in die Kiste legte, wären immer noch mehr blaue als rote Bälle in der Kiste.

    c) Es liegen mehr als dreimal so viele blaue wie rote Bälle in der Kiste.

23. Zeige, dass die Ungleichung

$$4(3-2x)-12x-14<7x-2-3(7-6x)$$

die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left]\frac{7}{15};\infty\right[$ besitzt und gib anschließend die Lösungsmenge der Ungleichung

$$4(3-2x)-12x-14\geq 7x-2-3(7-6x)$$

an.

24. Gegeben sind die Funktionen

$$f : x \mapsto x + \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g : x \mapsto \frac{2}{3}x + 2 \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{Q}.$$

a) Zeichne G_f und G_g in ein Koordinatensystem.

b) G_f, G_g und die y-Achse schließen ein Dreieck ein. Ergänze deine Zeichnung dementsprechend und gib (exakt) die Koordinaten aller drei Eckpunkte an. Bestimme (exakt) den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Erläutere deine Überlegungen.

25. Um ein Schwimmbecken vollständig mit Wasser zu füllen, brauchen 8 Pumpen genau 3 Stunden. Udai behauptet nun, dass 6 Pumpen, wenn sie das Schwimmbecken nur zu drei Fünftel füllen, genau 2,5 Stunden brauchen. Untersuche, ob Udai Recht hat. Gib gegebenenfalls an, um wie viele Minuten die Pumpen tatsächlich schneller oder langsamer sind.