Die ganzrationale Funktion f vom Grad 5 hat die einfache Nullstelle $x = -3$ und die zweifachen Nullstellen $x = 1$ und $x = 4$. Weiter gilt $f(0) = 3$. Bestimme $f(x)$. Erläutere deine Überlegungen. Skizziere den Graphen.

Weil f die einfache Nullstelle $x = -3$ hat, muss $f(x)$ den Faktor $(x+3)^1$ enthalten.
Weil f die zweifache Nullstelle $x = 1$ hat, muss $f(x)$ den Faktor $(x-1)^2$ enthalten.
Weil f die zweifache Nullstelle $x = 4$ hat, muss $f(x)$ den Faktor $(x-4)^2$ enthalten.
Damit muss $f(x)$ von der Form

$$f(x) = a(x+3)(x-1)^2(x-4)^2$$

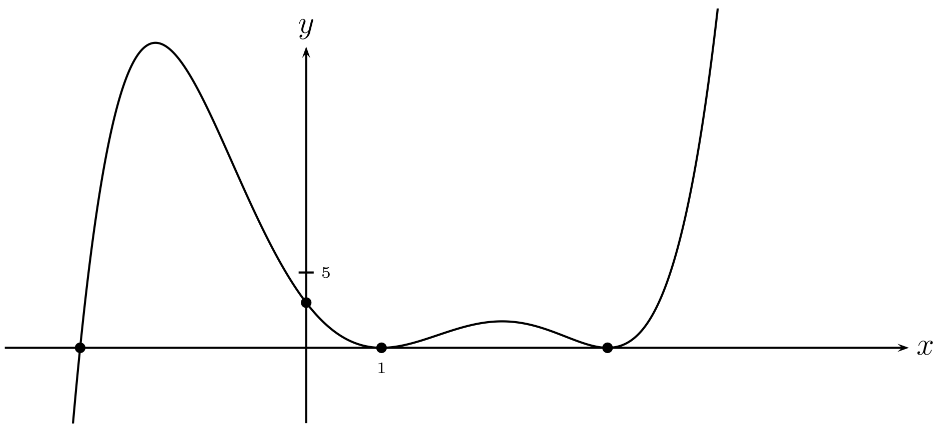
sein. Der Term $(x+3)(x-1)^2(x-4)^2$ hat schon den Grad 5, also muss a eine Zahl sein. Mit $f(0) = 3$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
3 &= f(0)\\
3 &= a \cdot 3 \cdot (-1)^1 \cdot (-4)^2\\
3 &= a \cdot 48\\
a &= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Also:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)^2(x-4)^2}{16}.$$

Wir denken daran, dass „zweifache Nullstelle“ für f keinen Vorzeichenwechsel für G_f und „einsfache Nullstelle“ für f einen Vorzeichenwechsel für G_f bedeutet.



Der Graph der Funktion $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ wird um -3 längs der x-Achse und um 4 längs der y-Achse verschoben. Es entsteht der Graph der Funktion g. Gib $g(x)$ an, erläutere deine Überlegungen.

Wenn ich den Graphen um -3 längs der x-Achse verschieben will, muss ich im Funktionsterm x durch $x + 3$ ersetzen. Also habe ich schon einmal (als Zwischenschritt):

$$g_{\text{Zwischenschritt}}(x) = f(x + 3).$$

Nun muss ich noch die Verschiebung um 4 längs der y-Achse berücksichtigen. Dann erhalte ich das geforderte g mit:

$$g(x) = g_{\text{Zwischenschritt}}(x) + 4 = f(x + 3) + 4.$$

Fertig.

Zur Übung und vollkommen überflüssig „vereinfachen“ wir den Term $g(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+3) + 4 \\ &= \frac{2(x+3)+1}{(x+3)^2+1} + 4 \\ &= \frac{2x+7}{x^2+6x+10} + 4 \\ &= \frac{2x+7+4(x^2+6x+10)}{x^2+6x+10} \\ &= \frac{4x^2+26x+47}{x^2+6x+10} \end{aligned}$$

In einer Klasse sind 12 Mädchen und 18 Buben. Ein Drittel der Buben dieser Klasse spielt Fußball. Die Anzahl der Mädchen (dieser Klasse), die nicht Fußball spielen, ist dreimal so groß wie die Anzahl der Mädchen (dieser Klasse), die Fußball spielen.

a) Erstelle eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

b) Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes, Fußball spielendes Mitglied dieser Klasse ein Mädchen ist.

Lösung kommt später

Polly behauptet, eine Lösung der Gleichung $8+\sin(3x) = 4\cos(2x)$ gefunden zu haben. Begründe, warum Polly auf keinen Fall Recht haben kann.

Lösung kommt später

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,c} : x \mapsto \sin(ax) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$. Gib für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für a und einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $f_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

1. Die Funktion $f_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0; 2]$.

2. Die Funktion $f_{a,c}$ hat im Intervall $[0; \pi]$ genau drei Nullstellen.

Lösung kommt später

Aufgabe kommt später

Lösung kommt später

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2^{-x} \cdot (3x + x^2)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Nullstellen von f.

b) Zeige, dass der Graph von f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

c) Gib das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und eine Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.

Lösung kommt später

Gib jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) Der Graph der Funktion f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der x-Achse hervor.

b) Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

c) Die Funktion h hat den Wertebereich $[-2; 4]$.

d) Die Funktion i besitzt die Periode π.

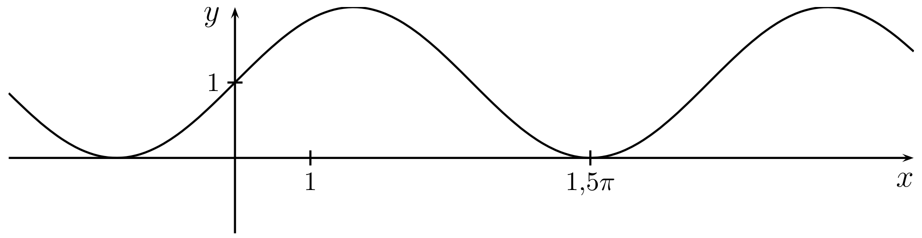
e) Die Funktion j besitzt keine Nullstellen.

Lösung kommt später

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto (8 - x^3) \cdot (25 + \log_5 x)$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}$.
Gib $\mathbb{D}$ an und bestimme die Nullstellen von f.

Lösung kommt später

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = 1+\sin x$, $g(x) = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ und $h(x) = 1+\sin(2x)$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.



Gib an, um welche Funktion es sich handelt. Begründe, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

Lösung kommt später

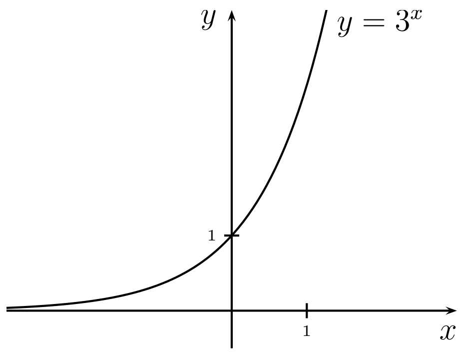
Die Funktion f hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und den Wertebereich $[-2; 4]$; sie ist periodisch mit Periodenlänge π und ihr Graph enthält den Punkt $(0 \,|\, 1)$. Gib einen möglichen Funktionsterm $f(x)$ an; erläutere deine Überlegungen. Zeichne einen möglichen Graphen im Bereich $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

Lösung kommt später

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = a \cdot 3^x + b$. Bestimme a und b so, dass die Punkte $(1\,|\,34)$ und $(2\,|\,106)$ auf dem Graphen von f liegen.

Lösung kommt später

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 3^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



a) Quirine verschiebt G_f zuerst um 2 längs der x-Achse, anschließend noch um -3 längs der y-Achse. Es entsteht der Graph der Funktion g. Gib $g(x)$ an.

b) Quendrime spiegelt G_f zuerst an der Geraden $y = x$, anschließend verschiebt sie ihn noch um 2 längs der y-Achse. Es entsteht der Graph der Funktion h. Gib $h(x)$ an.

c) Quendresa spiegelt G_f an der Geraden $y = 1$. Es entsteht der Graph der Funktion i. Gib $i(x)$ an.

d) Quida spiegelt G_f an der Geraden $x = 1$. Es entsteht der Graph der Funktion j. Gib $j(x)$ an.

Lösung kommt später

Ein Moderator lädt zu seiner Talkshow drei Politiker, eine Journalistin und zwei Mitglieder einer Bürgerinitiative ein. Für die Diskussionsrunde ist eine halbkreisförmige Sitzordnung vorgesehen, bei der nach den Personen unterschieden wird und der Moderator den mittleren Platz einnimmt.

a) Gib einen Term an, mit dem die Anzahl der möglichen Sitzordnungen berechnet werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen berücksichtigt werden.

b) Der Sender hat festgelegt, dass unmittelbar neben dem Moderator auf einer Seite die Journalistin und auf der anderen Seite einer der Politiker sitzen soll. Berechne unter Berücksichtigung dieser weiteren Einschränkung die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

Lösung kommt später

Gib den Term einer Funktion f an, die in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = 3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat und deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote hat.

Lösung kommt später

Gegeben sind die Funktionen

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \quad \text{und} \quad g : x \mapsto 3\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0{,}2$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

a) Zeige, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Terme äquivalent ist: $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$; $\frac{2}{x^2+4x+3}$; $\frac{1}{0{,}5(x+2)^2-0{,}5}$

b) Begründe, dass die x-Achse horizontale Asymptote von G_f ist, und gib die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f an. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

c) Beschreibe, wie G_g aus G_f hervorgeht.

Lösung kommt später

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0 : x \mapsto x^4 - 2$.

a) Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordne jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründe drei deiner Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.

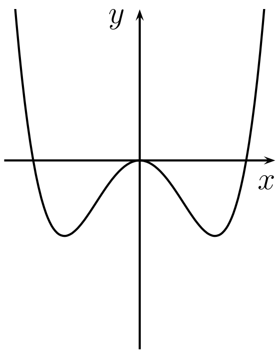


Abb. 1

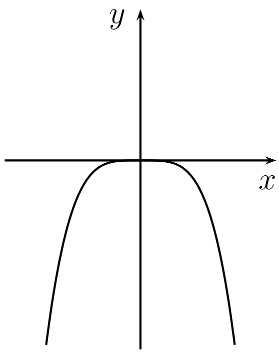


Abb. 2

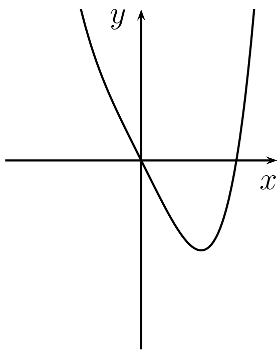


Abb. 3

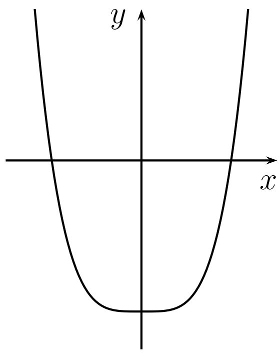
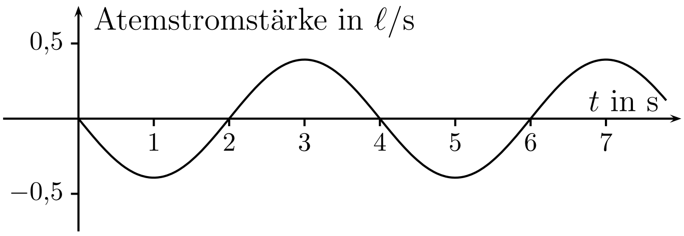


Abb. 4

b) Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Gib in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ an.

Lösung kommt später

In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus



wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $f : x \mapsto -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $f(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Die Abbildung zeigt den durch die Funktion f beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.

a) Berechne $f(1{,}5)$ und interpretiere das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

b) Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Gib auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und mache deine Antwort mit Hilfe der Abbildung plausibel.

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

c) Gib zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20% höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $g : t \mapsto a\sin(bt)$ mit $t \geq 0$ und $b \geq 0$ beschrieben werden. Ermittle den Wert von b.

Lösung kommt später

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f =]-\infty; 6]$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet und ist streng monoton steigend.

a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. Bestimme das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und gib $f(6)$ an. Gib den Wertebereich von f an.

b) Gib $f(-2)$ an und zeichne G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf die folgenden Aufgaben: $-3 \leq y \leq 7$).

c) Die Funktion f ist in $\mathbb{D}_f$ umkehrbar. Gib die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f an und zeige, dass $f^{-1}(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 4$ gilt.

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto -0{,}5x^2 + 2x + 4$ ist die Parabel G_h. Der Graph der in Teilaufgabe c) betrachteten Umkehrfunktion f^{-1} ist ein Teil dieser Parabel.

d) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von G_h mit der durch die Gleichung $y = x$ gegebenen Winkelhalbierenden w des I. und III. Quadranten.

e) Zeichne die Parabel G_h unter Berücksichtigung des Scheitels im Bereich $-2 \leq x \leq 4$ in das bereits vorhandene Koordinatensystem ein. Spiegelt man diesen Teil von G_h an der Winkelhalbierenden w, so entsteht eine herzförmige Figur; ergänze deine Zeichnung dementsprechend.

f) Schätze den Inhalt des von G_h und w eingeschlossenen Flächenstücks.

Lösung kommt später

Eine Bakterienkultur mit anfangs 30 000 Bakterien wird so angelegt, dass sich die Anzahl der vorhandenen Bakterien alle fünf Stunden verdoppelt.

a) Bestimme den Term, der die Anzahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Anzahl x der seit dem Anlegen der Kultur vergangenen Stunden beschreibt.

Zur Kontrolle: $N(x) = 30\,000 \cdot (\sqrt[5]{2})^x$.

b) Berechne, wie viele Bakterien drei Stunden nach dem Anlegen zu erwarten sind.

c) Berechne, wie lange gewartet werden muss, bis etwa 120 000 Bakterien vorhanden sind.

Lösung kommt später

In einer Urne liegen 2 rote, 3 gelbe und 4 blaue Kugeln.

1. Yehuda zieht aus dieser Urne 5-mal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit die 5. Kugel rot ist.

2. Yusuf zieht (aus der gegebenen Urne) 4-mal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Weil ihm dabei aus Versehen die zweite Kugel zu Boden fällt, sieht er, dass sie rot ist. Bestimme - unter dieser Bedingung - mit welcher Wahrscheinlichkeit auch die 4. Kugel rot ist.

3. Yvon zieht (ebenfalls aus der ursprünglich gegebenen Urne) 3-mal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit alle von ihm gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

1. Dies ist eine einfache Anwendung des Satzes „Das Ziehen ohne Zurücklegen ist kommutativ“.

$$P(\text{„5. Kugel rot“}) = P(\text{„1. Kugel rot“}) = \frac{2}{9}$$

2. Ohne nachzudenken wenden wir das gelernte Schema an.

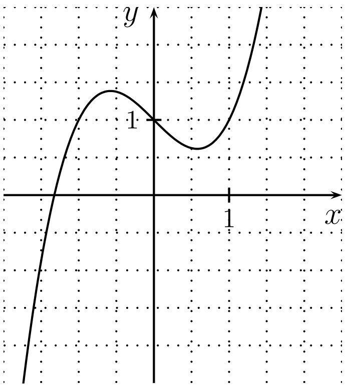
$$\begin{aligned} P_{\text{„2.K rot“}}(\text{„4.K rot“}) &= \frac{P(\text{„4.K rot“} \cap \text{„2.K rot“})}{P(\text{„2.K rot“})} \\ &= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{2}{9}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Wenn wir nachgedacht hätten, dann hätten wir dieses Ergebnis sofort erhalten, da wir ja so tun könnten, als ob Yusuf aus einer Urne mit 1 roten und 7 nichtroten Kugeln drei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen würde und uns die Wahrscheinlichkeit interessiert, dass Yusuf dabei im dritten Zug die rote Kugel zieht.

3. Dies geht auch einfach.

$$\begin{aligned} P(ggg) + P(bbb) &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} \\ &= \frac{5}{84} \end{aligned}$$

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.



Gib an, um welche Funktion es sich handelt. Begründe, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

Lösung kommt später